****

课程设计报告书

**题目：常微分方程初值问题数值计算**

**及其应用**

**学 院 数学学院**

**专 业 数学与应用数学（统计学）**

**学生姓名 邓睿**

**学生学号 202130320342**

**指导教师 黄凤辉**

**课程编号 040101461**

**课程学分 2**

**起始日期 2023年6月**

|  |  |
| --- | --- |
| 教  师  评  语 | 教师签名：  日期： |
| 成  绩  评  定 |  |
| 备  注 |  |

**目录**

[常微分方程初值问题数值计算及其应用 1](#_Toc140766383)

[摘要： 1](#_Toc140766384)

[一、数值测试：相关理论结论验证及方法比较 1](#_Toc140766385)

[1.1问题一 1](#_Toc140766386)

[1.1.1问题分析与设计思路 1](#_Toc140766387)

[1.1.2程序清单 3](#_Toc140766388)

[1.1.3运行结果 3](#_Toc140766389)

[1.1.4结果分析 5](#_Toc140766390)

[1.2问题二 6](#_Toc140766391)

[1.2.1问题分析与设计思路 7](#_Toc140766392)

[1.2.2程序清单 8](#_Toc140766393)

[1.2.3运行结果 8](#_Toc140766394)

[1.2.4结果分析 8](#_Toc140766395)

[1.3问题三 9](#_Toc140766396)

[1.3.1问题分析与设计思路 9](#_Toc140766397)

[1.3.2程序清单 9](#_Toc140766398)

[1.3.3运行结果 10](#_Toc140766399)

[1.3.4结果分析 10](#_Toc140766400)

[二、应用实例：小型单级火箭上升问题模型求解 11](#_Toc140766401)

[2.1问题分析 11](#_Toc140766402)

[2.2问题假设 11](#_Toc140766403)

[2.3符号说明 11](#_Toc140766404)

[2.4模型建立及分析 12](#_Toc140766405)

[2.4.1第一阶段：引擎关闭前（燃料耗尽前） 12](#_Toc140766406)

[2.4.2第二阶段：引擎关闭后（燃料耗尽后） 12](#_Toc140766407)

[2.5模型的数值求解 13](#_Toc140766408)

[2.6评价 17](#_Toc140766409)

[三、课程设计总结 18](#_Toc140766410)

[参考文献 18](#_Toc140766411)

# 常微分方程初值问题数值计算及其应用

## 摘要：

为分析小型单级火箭升空过程中各个物理量随着时间的变化趋势，需要一个合理高效的模型对不同数据下的升空过程中物理量变化进行模拟。本文通过数值测试先对求解微分方程以及求解数值积分的部分方法进行理论结论验证以及方法比较。再对小型单级火箭升空过程建立数学模型，并通过带入不同的测试数值，根据得到的不同结果对其高度提升策略进行分析。

**关键词：**微分方程；数值积分；数学模型；火箭上升

**联系方式：**电话：18148603633；邮箱：racheljune@163.com

## 一、数值测试：相关理论结论验证及方法比较

对于以下给定初值问题，运用不同方法求解其数值解，并与精确解并行比较

其精确解为。

### 1.1问题一

#### 1.1.1问题分析与设计思路

对于（1）的微分方程初值问题，。首先将求解区间[0,2]进行n等分：则有

或

用向前差商近似（2）中的导数或者用左矩形公式近似（3）中的积分，由此可得Euler公式

用梯形公式近似(3)中的积分,由此可得梯形公式

将显式Euler公式作为预估公式，梯形公式作为校正公式可得改进的Euler公式

由微分中值定理得令，且，则

，且,。由此可得r级R-K公式

当r=4，q=1，p=0.5时可得四阶经典龙格-库塔公式

运用公式计算可以得到对应方法的收敛阶。

运用来求出各个方法的稳定性条件。对于显式Euler公式,则在h时该方法稳定。对于梯形公式，则在h时该方法稳定。对于改进Euler公式则在h时该方法稳定。对于四阶龙格-库塔公式。

#### 1.1.2程序清单

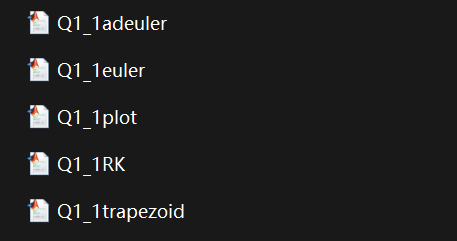


图1问题一程序清单

Q1\_1euler、Q1\_1adeuler、Q1\_1trapezoid、Q1\_1RK分别对应Euler法、改进的Euler法、梯形法、四阶R-K法对问题的求解，Q1\_1plot对应四种方法数值解与精确解的绘图比较。

#### 1.1.3运行结果

（1）Euler法

|  |  |
| --- | --- |
| 图2步长为0.0025的Euler法 | 图3步长为0.005的Euler法 |

通过比较两种步长的Euler法，得到Rate= 1.0007，说明Euler法为一阶精度，与理论相符合。

（2）改进的Euler法

|  |  |
| --- | --- |
| 图4步长为0.0025的改进Euler法 | 图5步长为0.005的改进Euler法 |

通过比较两种步长的改进的Euler法，得到Rate=2.2188，说明改进的Euler法为二阶精度，与理论相符合。

（3）梯形法

|  |  |
| --- | --- |
| 图6步长为0.0025的梯形法 | 图7步长为0.005的梯形法 |

通过比较两种步长的梯形法，得到Rate= 2.237480838077198，说明改进的梯形法为二阶精度，与理论相符合。

（4）四阶龙格-库塔法

|  |  |
| --- | --- |
| 图8步长为0.0025的四阶R-K法 | 图9步长为0.005的四阶R-K法 |

通过比较两种步长的四阶R-K法，得到Rate= 4.1675，说明四阶R-K法为四阶精度，与理论相符合。

#### 1.1.4结果分析

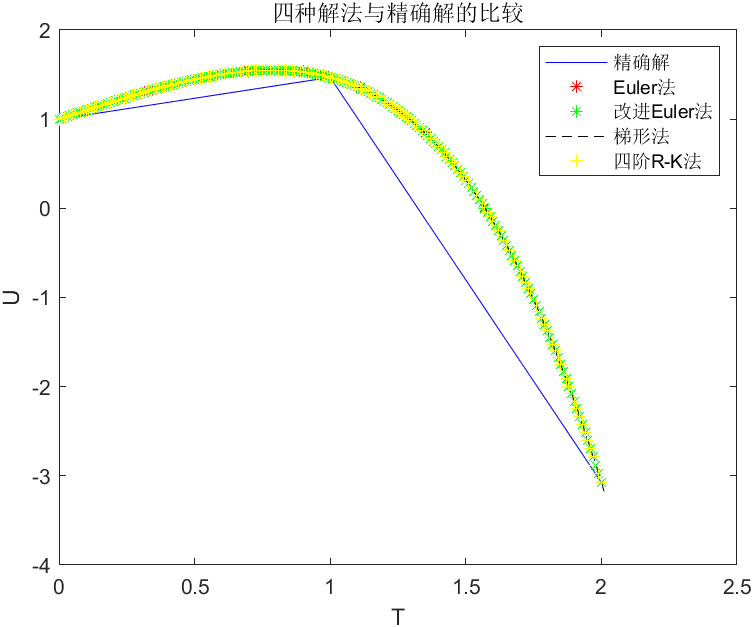


图10不同方法在步长0.01下的数值解曲线

从图10可以看出在步长0.01下各个方法得到的数值解与精确解的误差比较接近。

通过比较图2、图4、图6、图8，可以看到在相同步长h=0.0025条件下，四阶龙格-库塔法的精确解与数值解的误差最小，与其精度最高相符合。以下进行四种方法优缺点的比较。

（1）欧拉方法：

优点：思想简单，编程易实现，计算速度较快。适用于简单的问题和较粗糙的数值解。

缺点：数值稳定性较差。对于刚性问题或需要高精度解的问题不适用。

（2）改进欧拉方法

优点：比欧拉方法更准确，精度较高。适用于较为简单的问题和一般的数值解。

缺点：仍然存在数值稳定性问题，对于刚性问题不适用。相对于欧拉方法，计算量稍大。

（3）梯形法

优点：较高精度数值解

缺点：计算量较大，数值稳定性较好

（4）四阶标准龙格-库塔法

优点：高精度的数值解，适用于需要较高精度的问题。数值稳定性较好，适用于刚性问题。

缺点：计算量相对较大，比欧拉方法和改进欧拉方法更耗时。对于非常精细的数值解可能不够准确。

欧拉方法是一种简单和快速的数值计算方法，但精度较低且数值稳定性较差。改进欧拉方法在精度上有所提升，适用于一般的问题。梯形法相对于欧拉法精度有所提升，计算量大于改进欧拉方法。四阶标准龙格-库塔法具有更高的精度和数值稳定性，适用于需要较高精度的问题，但计算量相对较大。在选择数值计算方法时，需要综合考虑问题的特性、精度要求和计算效率。

### 1.2问题二

分别采用分段Lagrange插值和分段Hermite插值计算u(0.97)、u(1.03)、u(1.51)、 u(1.96)处的函数值。

#### 1.2.1问题分析与设计思路

Lagrange插值公式为：

其中，为第i个点处的函数值。

为提高插值函数的精确度，采用分段Lagrange插值，即在每一点附近采用一次插值。一次Lagrange插值公式为

已知信息如表1所示

表1 Lagrange插值所需已知数据

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| u(t) | 1.4978 | 1.48698 | 1.44764 | 1.43214 |
| t | 0.96 | 0.976 | 1.024 | 1.04 |
| u(t) | 0.300209 | 0.232022 | -2.76856 | -2.76856 |
| t | 1.504 | 1.52 | 1.952 | 1.968 |

两点三次Hermite插值公式为：

已知信息如表2所示

表2两点三次Hermite插值所需已知数据

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| u(t) | 1.4978 | 1.48698 | 1.44764 | 1.43214 |
| t | 0.96 | 0.976 | 1.024 | 1.04 |
|  | -0.6357 | -0.7049 | -0.9236 | -1.0011 |
| u(t) | 0.300209 | 0.232022 | -2.76856 | -2.76856 |
| t | 1.504 | 1.52 | 1.952 | 1.968 |
|  | -4.1766 | -4.3213 | 5.5328 | -9.3489 |

#### 1.2.2程序清单

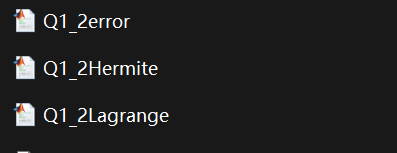


图11问题二程序清单

Q1\_2Lagrange和Q1\_2Hermite分别为分段Lagrange插值和分段两点三次Hermite插值的求解程序，Q1\_2error为求精确解以及误差的程序。

#### 1.2.3运行结果

运用Lagrange插值计算结果如表3

表3分段Lagrange插值计算结果

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| t | 0.97 | 1.03 | 1.51 | 1.96 |
| u(t) | 1.4910375 | 1.4418275 | 0.274638875 | -2.76856 |

运用两点三次Hermite插值计算结果如表4

表4分段两点三次Hermite插值计算结果

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| t | 0.97 | 1.03 | 1.51 | 1.96 |
| u(t) | 1.491161671875 | 1.4419788125 | 0.27492212890625 | -2.7387966 |

根据精确解计算出各点处精确解如表5所示

表5精确解计算结果

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| t | 0.97 | 1.03 | 1.51 | 1.96 |
| u(t) | 1.4912287661 | 1.4420414777046 | 0.275039098644 | -2.693852183682 |

#### 1.2.4结果分析

分别用两种插值方法得到的插值减去精确解得到误差，每个点处的误差如表6所示

表6误差值

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| t | Lagrange插值的误差 | Hermite插值的误差 |
| 0.97 | 0.000191266099957 | 0.000067094224957 |
| 1.03 | 0.000213977704584 | 0.000062665204584 |
| 1.51 | 0.000400223643876 | 0.000116969737626 |
| 1.96 | 0.074707816318006 | 0.044944416318006 |

由表6可见，分段两点三次Hermite插值的误差小于分段一次Lagrange插值的误差，因此分段两点三次的Hermite插值比分段一次Lagrange插值精度更高。以下比较两种方法的优缺点：

（1）分段Lagrange插值

优点：公式结构整齐紧密，数值稳定性好且容易编程实现，计算比较简便。

缺点：分段线性插值不能保证在节点处的插值函数的导数的连续性，即不光滑。因此分段Lagrange插值不适用于需要近似函数光滑的情况。

（2）分段两点三次Hermite插值

优点：比多项式插值更贴合被插值函数。

缺点：要求插值节点处函数值和导数值均已知才可以使用，实际问题中比较难实现。

### 1.3问题三

#### 1.3.1问题分析与设计思路

复化梯形公式为：

其余项为：

首先直接用精确解求出积分的精确值，再运用四阶龙格-库塔法得到的各点处的数值解作为节点处的函数值，进行对积分值的估计。通过比较估计值与精确值的绝对误差取对数与步长对数的函数关系得到方法的收敛阶。

#### 1.3.2程序清单

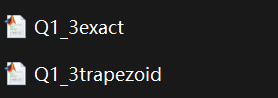


图12问题三程序清单

Q1\_3exact为求解积分精确解的程序，Q1\_3trapezoid为以四阶龙格-库塔公式得到的各点数值解为复化梯形公式节点函数值求积分估计值以及进行收敛阶判定的程序。

#### 1.3.3运行结果

首先先对精确解进行求积分，得到，即h的精确解为1.321958688394446。

再运用四阶龙格-库塔法得到的各点处的数值解作为复化梯形公式节点处的函数值，进行对积分值的估计，计算得到估计值为1.304972432245486。

#### 1.3.4结果分析

做出误差与步长的对数函数图，横坐标是步长对数，纵坐标是绝对误差对数，两种是直线关系，且其斜率就是方法的收敛阶。

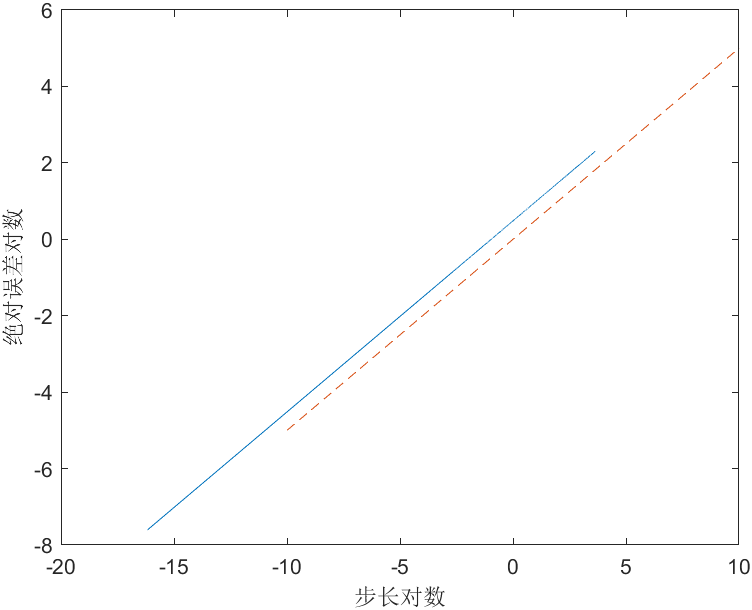


图13步长对数与绝对误差对数函数关系图

在误差式中取η为1，并对误差式两边取对数，以横坐标是步长对数，纵坐标是绝对误差对数，得到图像如图13所示。其中图像中橙色的虚线为直线，由图可得两条直线相平行，即步长对数与绝对误差对数成线性关系，斜率为2，因此复化梯形公式的收敛阶为2阶，与理论值相同。

## 二、应用实例：小型单级火箭上升问题模型求解

### 2.1问题分析

这是一个研究火箭竖直向上发射的问题。该过程分成两个阶段：有燃料（引擎关闭前）和燃料已用尽（引擎关闭后）。为得到整个过程中火箭达到的最大高度、最大速度以及达到最大高度的时间等，需要建立火箭升空过程的微分方程模型来对相关变量进行分析。

### 2.2问题假设

（1）火箭只受推力、空气阻力以及重力影响，其他因素也忽略，在喷气推动下作直线运动。

（2）火箭上升初始度为零，引擎足够强大。

（3）火箭上升时所受的重力加速度不变。

（4）假设产生影响的各个因素相互独立。

### 2.3符号说明

表7符号说明

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 符号 | 物理意义 | 单位 |
|  | 小型火箭初始质量 | kg |
| m(t) | 火箭在t时刻质量 | kg |
|  | 小型火箭初始燃料质量 | kg |
| u | 燃料燃烧速度 | kg/s |
| F | 恒定推力 | N |
| R | 空气阻力 | N |
| v | 火箭速度 | m/s |
| k | 比例系数 | kg/m |
| g | 重力加速度 | m/ |
| t | 时间 | s |
| a(t) | 加速度 | m/ |
| h(t) | 高度 | m |

### 2.4模型建立及分析

#### 2.4.1第一阶段：引擎关闭前（燃料耗尽前）

引擎关闭前，燃料燃烧产生恒定推力，但随着燃料的不断消耗，火箭的质量是变化的，因此，火箭的速度以及加速度是变化，根据牛顿第二定理，建立速度函数的微分方程，再求路程（高度）与加速度。

令为燃料耗尽的时间，则。根据牛顿第二定律可以得到以下微分方程模型。

整理后得

火箭在t时刻内飞到的高度为速度从0到t的积分，即可得h(t)表达式。

由物理知识可知，加速度为速度的导数

#### 2.4.2第二阶段：引擎关闭后（燃料耗尽后）

燃料已经完全消耗，没有推力，火箭的质量是恒定的。引擎关闭即第一阶段终止第二阶段开始的时刻（根据燃料燃烧的速度，可以算出此时刻）。由于火箭受到阻力的作用，火箭先加速，后减速。在此阶段，火箭将达到最高高度（此时刻记为，）。根据牛顿第二定理，建立速度函数的微分方程，（高度）与加速度。

由牛顿第二定律可得以下微分方程。

整理后得

火箭在t时刻内飞到的高度为速度从0到t的积分，即可得h(t)表达式。

由物理知识可知，加速度为速度的导数

### 2.5模型的数值求解

（1）,，，，

在这种情况下，，即经过40s后燃料耗尽。对速度与时间的微分方程求解，得到在t=40s时火箭的速度，火箭所在高度h=6526.54m，火箭的加速度。运用同样的方法对燃料耗尽后的情况下的微分方程进行求解，得到火箭在t=53.534s时达到上升的最大高度maxh=7653.68m，此时火箭的速度，加速度为。

|  |  |
| --- | --- |
| 图14情况1火箭上升高度与时间关系 | 图15情况1火箭加速度与时间关系 |
| 图16情况1火箭速度与时间关系 | |

（2）,，，，

在这种情况下，，即经过60s后燃料耗尽。对速度与时间的微分方程求解，得到在t=60s时火箭的速度，火箭所在高度h=11237m，火箭的加速度。运用同样的方法对燃料耗尽后的情况下的微分方程进行求解，得到火箭在t=70.7209s时达到上升的最大高度maxh=12065.8m，此时火箭的速度，加速度为。

|  |  |
| --- | --- |
| 图17情况2火箭上升高度与时间关系 | 图18情况2火箭加速度与时间关系 |
| 图19情况2火箭速度与时间关系 | |

（3）,，，，

在这种情况下，，即经过40s后燃料耗尽。对速度与时间的微分方程求解，得到在t=40s时火箭的速度，火箭所在高度h=7628.12m，火箭的加速度。运用同样的方法对燃料耗尽后的情况下的微分方程进行求解，得到火箭在t=53.9686s时达到上升的最大高度maxh=8887.23m，此时火箭的速度，加速度为。

|  |  |
| --- | --- |
| 图20情况3火箭上升高度与时间关系 | 图21情况3火箭加速度与时间关系 |
| 图21情况3火箭速度与时间关系 | |

（4）,，，，

在这种情况下，，即经过40s后燃料耗尽。对速度与时间的微分方程求解，得到在t=40s时火箭的速度，火箭所在高度h=7691.37m，火箭的加速度。运用同样的方法对燃料耗尽后的情况下的微分方程进行求解，得到火箭在t=50.7208s时达到上升的最大高度maxh=8520.16m，此时火箭的速度，加速度为。

|  |  |
| --- | --- |
| 图22情况4火箭上升高度与时间关系 | 图23情况4火箭加速度与时间关系 |
| 图24情况4火箭速度与时间关系 | |

比较情况1和情况2可得，火箭自重、燃料燃烧速度、比例系数、恒定推力不变的情况下增加燃料重量可以提高火箭发射最大高度以及最大速度，但达到最大速度的时间增长。比较情况1和情况3可得，火箭自重、燃料燃烧速度、燃料重量、比例系数不变的情况下增加恒定推力大小可以提高火箭发射最大高度以及最大速度，且在相同时间内达到最大速度。比较情况1和情况4可得，燃烧燃料速度、燃料重量、比例系数、恒定推力大小不变的情况下，减小火箭自重可以提高火箭发射最大高度以及最大速度，且在相同时间内达到最大速度。因此，要提高火箭升空高度，可以通过增大恒定推力、减小火箭自重、增大燃料重量等方法实现。由于增大燃料重量来增加火箭发射最大高度需要以延长时间为代价，因此在考虑该因素时需要同时考虑时间成本。由于单级火箭不能抛掉废重，只能通过增加燃料加注量和降低火箭自重来获得较大的飞行速度。即使这样，现有的燃料产生能量的水平也很难使火箭的最大速度达到7 km/s以上，故使用单级火箭难以达到使火箭环绕地球运行的第一宇宙速度，也就是说单级火箭难以用于发射人造地球卫星。

### 2.6评价

优点：

（1）模型可操作性强，容易编程实现，且计算方便。

（2）可视化操作简便，形象逼真，易于推广。

不足：

（1）将现实模型简单化，没有考虑火箭发射时所有影响因素。

（2）数值求解中没有改变燃料燃烧速度以及比例系数。

## 三、课程设计总结

这次MATLAB课程设计为我提供了与众不同的学习方法和学习机会，让我从传统的被动授学转变为主动求学；从死记硬背的模式中脱离出来，转变为在实践中学习，增强了领悟、创新和推断的能力。掌握自学的方法，形成工程理论整体模式，使工作、学习、生活都步入系统化流程；思考方式成熟，逻辑性规范、明确。这些方法的提高是终身受益的，我认为这难得的一次学习机会，让我真正懂得了生活和学习的基本规律。

在编写程序的过程中，有时候会遇到报错的问题，自己通常是需要花挺长时间去发现错误的。在可视化过程中，对于不知道如何实现的画图标注，我通常会通过翻阅资料，学习并解决自己的问题。

完成了课程设计的任务，但是从中发现的问题也是值得去深思的。我想经过这一个课程设计所发现的问题对我会有很大的启示，在以后的学习中也会大有帮助。在以后的学习中我会不断的改进学习方法，在实践中学习，不断提高自我，全面提高自己。

我认为在编程方面，自己独立完成的较好，在课程设计报告撰写方面，排版比较美观，给自己一个优秀吧。

## 参考文献

[1]郑咸义，计算方法，华南理工大学出版社，2002.